Combien de chiffres après la virgule ?

André Cornélis

et

André Gerstmans

Printemps des sciences 2004

UNIVERSITÉ de Liège

Combien de chiffres après la virgule ?

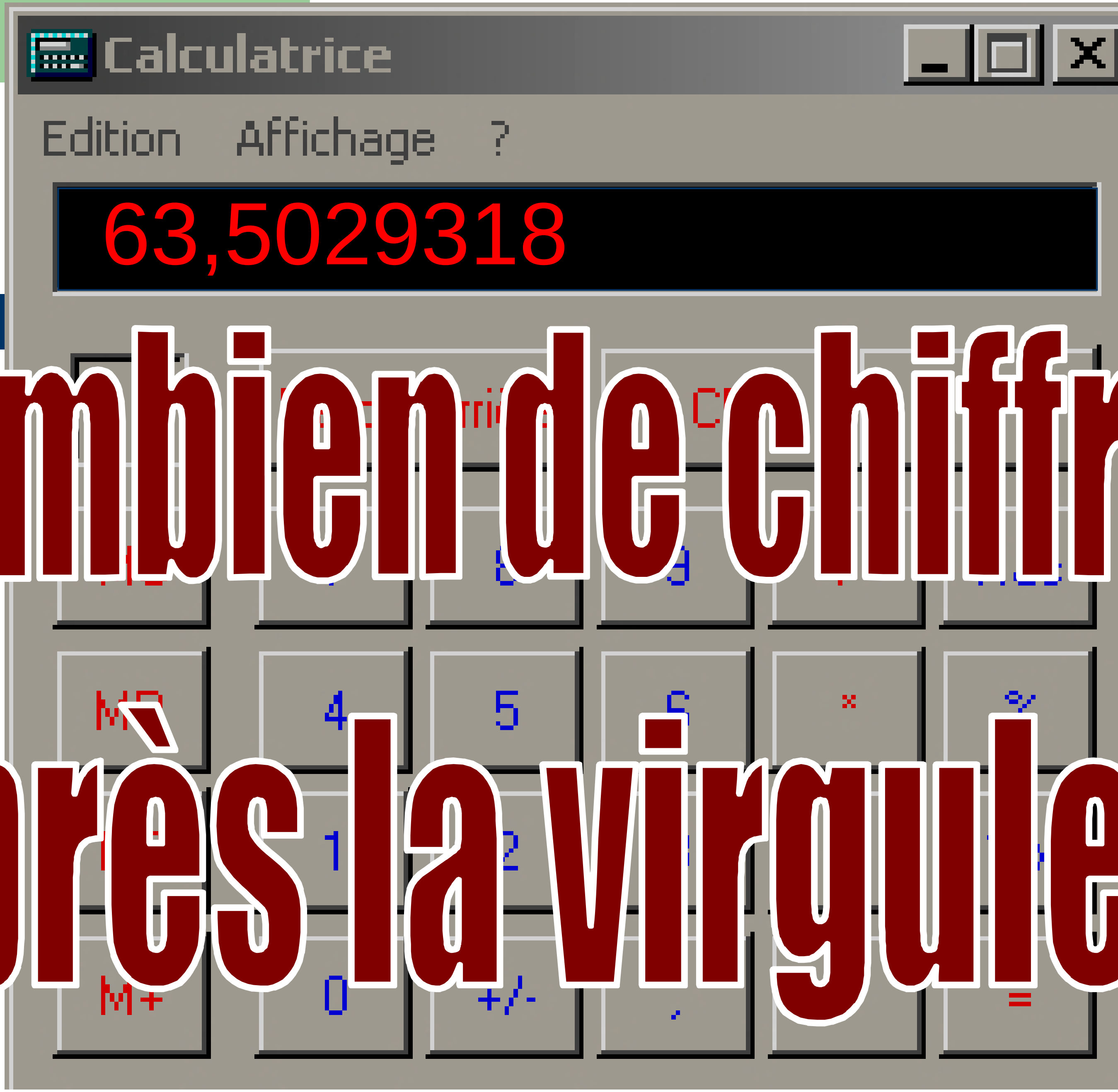
- Le problème
- Les chiffres significatifs
- Calculer avec des chiffres significatifs
- En conclusion

ULg
UNIVERSITÉ de Liège

- Un Anglais pèse 140 lb.

  Combien cela fait-il en kg ?

  - Le facteur (exact) de conversion est 0,45359237 kg/lb



Combien de chiffres après la virgule ?

Si on en croit la calculatrice …

$$140 \text{ lb} = 140 \text{ lb} \times 0{,}45359237 \text{ kg/lb}$$

$$= 63{,}5029318 \text{ kg}$$

kg g mg

Au départ d'une mesure dont la précision est de l'ordre de 1 lb (donc de l'ordre de 0,5 kg), une simple conversion d'unité pourrait-elle amener à une précision au 1/10 mg près ?

ULg UNIVERSITÉ de Liège

Au cours de chimie

- Le brome naturel est composé de deux isotopes
- ^{79}Br, abondance naturelle 50,69 %
- ^{81}Br, abondance naturelle 49,31 %

- A partir de ces données, calculer la masse atomique relative de Br.

ULg UNIVERSITÉ de Liège

Calcul :

$$\frac{79 \times 50{,}69}{100} + \frac{81 \times 49{,}31}{100} = 79{,}9862$$

Mais le tableau périodique mentionne 79,904 !

Les deux valeurs sont-elles compatibles ?

ULg
UNIVERSITÉ de Liège

A retenir absolument :

- Une marge d'incertitude est associée :
  - à toute valeur mesurée;
  - à toute valeur calculée à partir de valeurs mesurées.

- Dans les sciences « exactes », tout raisonnement, toute analyse doivent prendre cette incertitude en compte

Pourquoi des chiffres sont-ils « significatifs » et d’autres pas ?

- En sciences, on ne rapporte que ce qui a objectivement été observé
- En conséquence, on limite l'écriture d’un nombre aux chiffres raisonnablement fiables en dépit de l’incertitude : les chiffres significatifs
- La précision que des chiffres supplémentaires sembleraient apporter est illusoire

Pour ne garder que les chiffres significatifs, on doit souvent arrondir

$$m = (25{,}43 \pm 0{,}21)\ \text{kg}$$

$$\Downarrow$$

$$m = (25{,}4 \pm 0{,}2)\ \text{kg}$$

Intervalle de confiance

ULg UNIVERSITÉ de Liège

Arrondir selon les règles

- Lorsque le chiffre de rang le plus élevé qu'on laisse tomber est supérieur à 5, le chiffre précédent est augmenté de 1
- Lorsque le chiffre de rang le plus élevé qu'on laisse tomber est inférieur à 5, le chiffre précédent reste inchangé
- Lorsque le chiffre de rang le plus élevé qu'on laisse tomber est égal à 5, si un des chiffres qui le suivent n'est pas nul, le chiffre précédent est augmenté de 1

ULg
UNIVERSITÉ de Liège

12,66 s'arrondit à 12,7

12,64 s'arrondit à 12,6

12,6502 s'arrondit à 12,7

Comment arrondir un 5 "sec" ?

- Si le chiffre de rang le plus élevé qu'on laisse tomber est un 5 terminal (qui n'est suivi d'aucun chiffre) ou qui n'est suivi que de zéros, on augmente de 1 le dernier chiffre du nombre arrondi s'il est impair, sinon on le laisse inchangé

12,75 s'arrondit à 12,8

12,65 s'arrondit à 12,6

- Dans ce cas, le dernier chiffre du nombre arrondi est donc toujours un chiffre pair

Pourquoi procéder de la sorte ?

- Pour éviter d'introduire un biais dans une série de mesures en arrondissant systématiquement les 5 terminaux vers le haut.

- Pas réellement indispensable en dehors de ce contexte de série – mais à conseiller (cohérence dans le traitement)

Manière simplifiée d'indiquer l'incertitude

- Souvent, les sources de données ne mentionnent pas d'intervalle de confiance (c.à.d. une indication telle +/- …)

$$m = 25,4 \text{ kg}$$

- Dans ce cas, conventionnellement, on considère que l'incertitude est du même ordre de grandeur que le rang du dernier chiffre significatif – le chiffre « incertain »

Perte d'information :

- En fait, seul le rang décimal de l'incertitude est implicite : sa marge réelle n'est pas précisée

101,1 g → (101,1 +/- 0,1) g ou (101,1 +/- 0,3) g ?

Quels sont les chiffres significatifs ?

- Les chiffres significatifs d'une valeur comprennent tous ses chiffres déterminés avec certitude ainsi que le premier chiffre sur lequel porte l'incertitude

(Ce dernier chiffre significatif occupe le même rang que l'ordre de grandeur de l'incertitude)

ULg
UNIVERSITÉ de Liège

Exemple

- On mesure la longueur d'une planchette au moyen d'un double mètre :

  lecture sur l'instrument : 507,3 mm.

  Si l'incertitude sur la mesure est de +/- 2 mm :

  - Les chiffres certains sont le 5 et le 0
  - le premier chiffre incertain est le 7

  On rapportera la mesure, 507 mm, avec 3 chiffres significatifs

Conventions

- Si le nombre comporte un séparateur décimal (« , » en typographie française)
  - Tous les chiffres différents de zéro sont significatifs
  - Tous les zéros situés à droite d'un chiffre différent de zéro sont significatifs (quel que soit le nombre de rangs décimaux qui les sépare de celui-ci)
  - Aucun autre zéro n'est significatif
    (ils n'indiquent que l'ordre de grandeur en situant le séparateur décimal)

Diversité d'écritures et d'unités

- 70,300 g
- 0,70300.10^2 g
- 7,0300.10^4 mg
- 0,070300.10^3 g
- 0,070300 kg
- 7,0300.10^{-2} kg

représentent la même valeur,

connue avec 5 chiffres significatifs

Conventions

- Si le nombre ne comporte pas de séparateur décimal
  - Si le dernier chiffre de droite est différent de zéro : tous les chiffres sont significatifs

    Exemple : 75 g de sucre

  - Si le dernier chiffre de droite est un zéro : ambiguïté

    _ réfléchir, utiliser son sens critique

Sens critique

- J'habite à 500 m de l'école :

  vraisemblablement 1 chiffre significatif

  – Cela veut dire entre 400 et 600 m, (500 ± 100) m!
  – L'incertitude est de même rang que le premier chiffre de gauche de la valeur - qui en est le seul chiffre significatif
  – Les deux 0 finals ne sont pas significatifs

Sens critique

- On vient de me livrer 100 kg de sucre : vraisemblablement 3 chiffres significatifs

  (le marchand, honnête, n'a pas non plus fait de cadeau)

Connaissance du contexte

- Lu dans la presse: « Le sprinter a battu le record du 100 m » :
  en réalité 5 chiffres significatifs !

  – Mesurage d'une piste d'athlétisme de longueur L :
    deux mesurages indépendants qui ne peuvent différer de plus de (0,0003 x L) m + 1 cm

  – donc (100,00 ± 0,04) m

Un texte, un instrument de mesure, une calculatrice, ça ne réfléchit pas

Vous bien !

Éviter l'ambiguïté

- Pour noter sans ambiguïté 510 mm
  - soit avec 2 chiffres significatifs
  - soit avec 3 chiffres significatifs

mettre en notation scientifique

- $5{,}1.10^2$ mm
- $5{,}10.10^2$ mm

– Autres possibilités (3 chiffres significatifs)
  - Terminer le nombre par une virgule : 510, mm
  - Changer d'unité et faire apparaître une virgule : 51,0 cm

ULg UNIVERSITÉ de Liège

Nombres exacts et chiffres significatifs

- Certaines valeurs sont connues sans incertitude, par exemple
  - par dénombrement
  - par définition
  - mathématiquement

- On traite ces nombres exacts comme s'ils comportaient une infinité de chiffres significatifs

Exemples de nombres exacts

Dénombrement :

- Il y a 14 élèves dans la classe
- Le mois de janvier comporte 31 jours
- Le Standard a encaissé 3 buts

Coefficients et indices stœchiométriques

- Dans une molécule d'eau, il y a 1 atome d'oxygène et 2 atomes d'hydrogène
- $2\ H_2 + (1)\ O_2 \rightarrow 2\ H_2O_{(1)}$

Exemples de nombres exacts

Certaines constantes physiques (pas toutes)

- La vitesse de la lumière c = 299 772 458 m/s
  (mais pas $3{,}0.10^8$ m/s : arrondi à 2 chiffres significatifs)

Certains facteurs de conversion (pas tous)

- 1 pouce = 2,4 cm
- 1 km = 1.10^3 m

Valeurs de définition

- Les unités de mesure et leurs multiples : 1 L, 5 L, grandeurs « énoncées » et non « mesurées »;
  exemple : la concentration molaire est par définition la quantité de matière dans exactement 1 L

Exemples de nombres exacts

Les nombres « purement mathématiques » :

- $b^2 - 4ac$
- π et e, non arrondis

  3,1416 ou 2,718 n'en sont que des arrondis à un nombre limité de chiffres significatifs

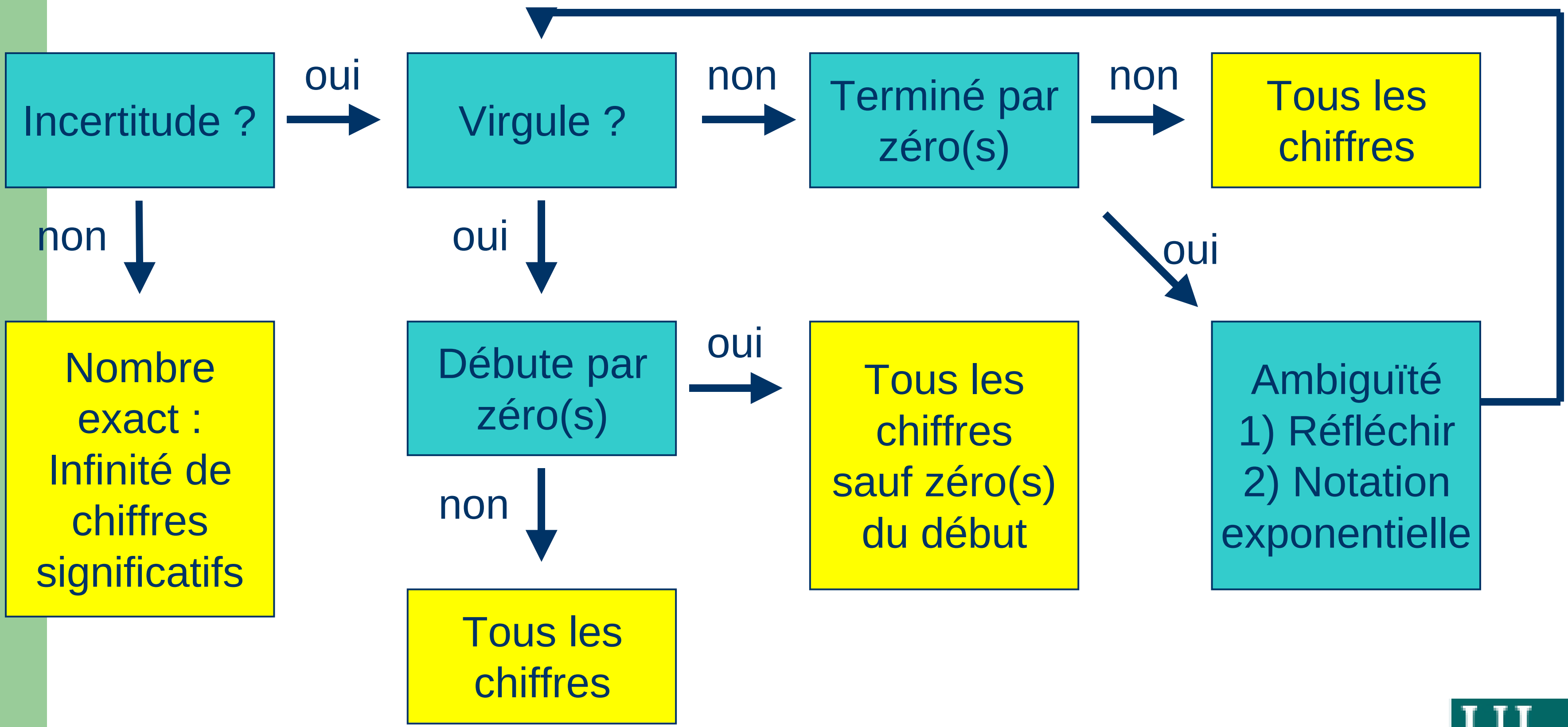
- Les fractions (1/2, 3/5, 1/3, 7/100, etc) et les nombres périodiques (0,66666... 0,45454545...) non arrondis !
- Les nombres quantiques (n = 3, ***l* = 2, ...)**

Attention au contexte

- 12000 manifestants ont défilé
  - Estimation et non comptage _ **incertitude** : $1,2.10^4$
- Dans un réacteur, nous avons introduit 2,0 mol de H_2 et 1,0 mol de O_2. Après réaction, nous avons recueilli 2,0 mol de H_2O
  - données expérimentales _ **incertitude**
- Une masse volumique de 2,37 g/mL :
  - 2,37 g (incertitude) dans 1 mL (exact)

ULg UNIVERSITÉ de Liège

Résumé: tableau de détermination



Calculer avec des chiffres significatifs

Beaucoup de grandeurs s'obtiennent comme résultat d'un calcul à partir de mesures directes

Principe de base

- Une opération mathématique ne peut améliorer l'incertitude induite par l'incertitude sur les données

Chiffres significatifs et valeurs calculées

- Dans une approche simplifiée, le nombre de chiffres significatifs du résultat d'un calcul est donné par des règles conventionnelles

- Celles-ci constituent un raccourci de méthodes plus rigoureuses

  – attention :
    une approche plus fine exigerait certaines précautions dans l'application de ces règles

Incertitude sur les opérations arithmétiques

- sommes ou différences

  Les incertitudes absolues sur les données s'additionnent

- produits ou quotients

  Les incertitudes relatives sur les données s'additionnent

Multiplication ou division

- Un produit ou un quotient ne peut être plus précis que la donnée sur laquelle l'incertitude relative est la plus élevée

  (celle qui a le moins de chiffres significatifs)

⇓

- Le résultat d'une multiplication ou d'une division est arrondi à autant de chiffres significatifs que la donnée qui en compte le moins

Vérification intuitive

- Effectuer le calcul avec la valeur mesurée
- Faire de même en faisant varier le dernier chiffre significatif de cette valeur d'une unité vers le haut et vers le bas
- Déterminer la marge de variation entre ces deux extrêmes
- Arrondir en fonction de cette marge

Variation à la multiplication

A	B	AxB	arrondi
123,45	12,8	1580,160	$1,58.10^3$
123,46	12,9	1592,634	$1,59.10^3$
123,47	13,0	1605,110	$1,61.10^3$

$1,59.10^3$

Variation à la division

A	B	A/B	arrondi
323,45	6,0	53,908333	$5,4.10^1$
323,46	6,1	53,026230	$5,3.10^1$
323,47	6,2	52,172581	$5,2.10^1$

$5,3.10^1$

Risque : surestimation de l'erreur

	A	B	AxB	Arrondi règle	Arrondi correct
	0,117	0,92	0,10764	0,11	0,108
É x / x	1%	1%		10%	1%

Addition ou soustraction

- Une somme ou une différence ne peut être plus précise que la donnée sur laquelle l'incertitude absolue est la plus élevée

  (celle qui possède le moins de décimales)

$$\Downarrow$$

- Le résultat d'une somme ou d'une différence est arrondi au même nombre de décimales que la donnée qui en comporte le moins

Variation à l'addition

A	B	A+B
123,45	12,8	136,25
123,46	12,9	136,36
123,47	13,0	136,47
		136,4

Variation à la soustraction

A	B	A-B
123,45	13,0	110,65
123,46	12,9	110,56
123,47	12,8	110,47
		110,6

Attention

$$234{,}31 - 234{,}20 = 0{,}11$$

- La soustraction de valeurs proches conduit à une diminution importante du nombre de chiffres significatifs

Logarithmes et exponentielles en base 10

- Le logarithme en base 10 d'un nombre, conserve autant de chiffres dans la mantisse (partie à droite de la virgule) qu'il y a de chiffres significatifs dans le nombre de départ

- Inversement, la valeur de l'exponentielle en base 10 d'un nombre comporte autant de chiffres significatifs qu'il y a de décimales dans ce nombre

Variation des logarithmes en base 10

x	log(x)	arrondi
$1{,}611.10^1$	1,207096	1,2071
$1{,}612.10^1$	1,207365	1,2074
$1{,}613.10^1$	1,207634	1,2076

Variation des puissances de 10

x	10^x	arrondi
-4,122	$7{,}550922.10^{-5}$	$7{,}55.10^{-5}$
-4,123	$7{,}533556.10^{-5}$	$7{,}53.10^{-5}$
-4,124	$7{,}516229.10^{-5}$	$7{,}52.10^{-5}$

En cas de doute
ou
devant une fonction non décrite ?

Même recette …
à utiliser avec circonspection

- Effectuer le calcul avec la valeur mesurée
- Faire de même en faisant varier le dernier chiffre significatif de cette valeur d'une unité vers le haut et vers le bas
- Déterminer la marge de variation entre ces deux extrêmes
- Arrondir en fonction de cette marge

- Ne pas en tirer trop rapidement de règle générale

Exemple: cosinus

angle degrés	cosinus	arrondi
5,0	0,99619	0,9962
5,1	0,99604	0,9960
5,2	0,99588	0,9959
30,0	0,86603	0,866
30,1	0,86515	0,865
30,2	0,86427	0,864
85,0	0,08716	0,087
85,1	0,08542	0,085
85,2	0,08368	0,084

ULg UNIVERSITÉ de Liège

Opérations successives

Opérations successives : règle de base

- Effectuer l'ensemble des opérations mathématiques en gardant l'ensemble des chiffres(*), significatifs ou non, dans les opérations intermédiaires (en pratique, laisser les résultats intermédiaires dans les mémoires de la calculatrice) et n'arrondir que le seul résultat final

- (*) En cas d'impossibilité pratique, garder au moins un chiffre de plus que le nombre de chiffres significatifs

Chiffres significatifs et combinaison d'opérations

- Si un calcul associe diverses opérations :
  - Effectuer les opérations dans l'ordre de la logique algébrique, jusqu'au résultat final, en notant les résultats intermédiaires
  - Dénombrer les chiffres significatifs des résultats intermédiaires obtenus
  - Sur la base des nombres de chiffres significatifs des intermédiaires obtenus en 2 ci-dessus, appliquer les règles pas à pas jusqu'au résultat final, **qui seul est arrondi**

ULg
UNIVERSITÉ de Liège

Exemple

- $pH = pK_a + \log(C_b/C_a)$

  $pK_a = 4{,}8$; $C_b = 0{,}935\ mol.L^{-1}$; $C_a = 1{,}102\ mol.L^{-1}$.

- $pH = 4{,}8 + \log(0{,}935/1{,}102) = 4{,}72863\ldots$ (affichage calculatrice)

Suivi des chiffres significatifs (sur résultats intermédiaires)
- 0,935/1,102 = 0,848 (quotient : 3 chiffres significatifs)
- log (0,848) = -0,072 (logarithme : 3 chiffres dans la mantisse)
- 4,8 – 0,072 = 4,7 (différence : 1 décimale)

Arrondi final : 1 décimale : pH = 4,7

ULg UNIVERSITÉ de Liège

Retour sur le brome et l'Anglais

Masse atomique relative du brome

$$\frac{79 \times 50{,}69}{100} + \frac{81 \times 49{,}31}{100} = 79{,}9862 = 80$$

(arrondi à deux chiffres significatifs)

Le tableau périodique mentionne $79{,}904 = 80$

si on arrondit aussi à 2 chiffres significatifs

Les deux valeurs sont compatibles !

Combien pèse un Anglais ?

140 lb $= 1{,}40.10^2$ lb x 0,45359237 kg/lb

= 63,5029318 kg = 63,5 kg

(arrondi à 3 chiffres significatifs)

Tenir compte des incertitudes par la méthode des chiffres significatifs

☺ Simple et aisé à mettre en œuvre

☹ Traitement simplifié : il possède ses limites